数理解析研究所講究録
370巻 1979年 1-13

ある非線型現象の方程式について
── 経済学に現れる定差方程式について ──

岩手大 教育 中島文雄

数理経済学に於て、需要－供給の法則は関数方程式によって記述されており、その力学について多くの興味ある結果が得られて来た（[1]）。その主な一つは、粗代替系と呼ばれる経済体における、価格の変動の安定性（global stability）についての研究である。この方面の、これまでの研究では、需要－供給の法則の関数方程式は、殆どが、微分方程式であった（例外的に Uzawa 氏の論文 [2] がある）。そしてその理由は、全く数学的便宜によるものであり、経済現象としては、むしろ定差方程式を用いるべきであることも指摘されて来た。

本稿では、この観点に立ち、定差方程式によって記述された粗代替系（但し、かなり特殊な場合）について、global stability の存在を証明する。次に、同じ観点の下で行われた Uzawa 氏の研究 [2] について見ると、そこで扱われ

ている方程式は，本稿の方程式と本質的に異っており，従って異った経済体を扱っていることが判る．この点について，本稿の末尾で述べる．

n次元ユークリッド空間をR^nで表し，$x\in R^n$に対し，x_iでそのi成分（$1\leq i\leq n$）を表す．2つのベクトル$x, y\in R^n$に対し，$x_i\leqq y_i$ （$1\leq i\leq n$）ならば，$x\leqq y$ で表し，$x\in R^n$について $x_i>0$ （$1\leq i\leq n$） ならば，$x>0$ で表す．集合 $R^+=\{x\in R^n ; x>0\}$ と置く．$n\times n$行列 $M=(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$，に対し $m_{ij}\geqq 0$ （$1\leqq i,j\leqq n$） ならば $M\geqq 0$ と表す．

今，経済体が n種の財から成り，それらを番号 $1, 2, \cdots, n$ で表す．i財の時刻tでの価格を$p_i(t)$で表し，価格体系をベクトル$p(t)=(p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t))$で表す．価格体系$p$の下での$i$財の超過需要量を$E_i(p)$で表す．本稿では，需要－供給の法則は次の定差方程式で記述されているとする；

$$(1)\quad p_i(t+1)=p_i(t)+\lambda_i E_i(p(t)),\quad 1\leq i\leq n,$$

$$p(t)\in R^+,$$

ここで，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は正の定数で，価格変動分 $p_i(t+1)-p_i(t)$ の超過需要量に対する比例係数に相当し，独立変数 tは自然数を

値とし，離散的時刻に相当する．本稿では，$E_i(p)$ は次の関数とする；

$$E_i(p) = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_k}{p_i} \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

ここで $\{a_{ik}\}$ は定数で，

$$a_{ik} > 0 \qquad (i \neq k),$$

$$a_{kk} = -\sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} a_{ik} \qquad (1 \leq k \leq n)$$ とする．

この場合，system (1) は，純粋交換経済で，各個人の効用関数が，すべて log-linear である場合に相当する．

次の定理が成立する．

定理．System (1) の $\{a_{ik}\}_{1 \leq i, k \leq n}$ に対し，

$$\alpha = \max_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \left\{ \frac{|a_{ii}|^2 \lambda_i}{|a_{ij}|}, \ |a_{ii}| \lambda_i \right\} > 0$$ と置く．

(1) の解の初期値 $p_0 = (p_{01}, p_{02}, \cdots, p_{0n})$ が

$$p_{0i} \geqq \alpha \qquad (1 \leq i \leq n)$$ を満せば，

次の事が成立する；

(I) (1)の解 $p(t)$ は $t \geqq 0$ で存在する，即ち

$$p(t) \in R^{+} \qquad (t = 1, 2, 3, \cdots),$$

(II) $p(t)$ は有界である.

(III) $p(t) \longrightarrow$ 均衡点 $(t \to \infty)$ となる,

ここで,ベクトル $\xi \in R^+$ が均衡点とは $E(\xi) = 0$ を満すことである.

[注釈1] System (1) に対し,均衡点 $\xi \in R^+$ が存在することは, Frobenius-Perron の定理より判る. (1)の型から,均衡点の定数倍は,又均衡点となるし,更に Frobenius-Perron の定理より,均衡点は定数倍を除いて唯一つとなることも知られている. 均衡点は均衡価格に相当する.

[注釈2] 定理の経済学的意味について述べる. 定理の結論は,上記の経済体では,財の取り引きが,いかなる初期の価格 p_0 から出発しても,ある時間の経過の後は,均衡価格に近い価格で,取り引きが行われていることを保証している. System (1) に於て, $\{a_{ij}\}$ が与えられた時,均衡価格 ξ が計算出来れば,財の取り引きは, ξ で行えば良く問題は無い. しかし,財の種類がかなり多ならば, ξ の算出は容易ではなく,その時,定理は意味を持つであろう.

定理の証明のため lemma を準備する．

lemma． $\xi \in R^+$ を (1) の均衡点の一つとし，定理の $\alpha > 0$ に対し，

$$\beta = \frac{\alpha}{\max_{1 \le i \le n} \xi_i}$$ とおく．

もし $p \in R^+$ が，$p \geqq \beta \xi$ ならば，

$$p_i \geqq \lambda_i |a_{ii}| \quad \text{for } 1 \le i \le n.$$

証明．$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in R^+$ は (1) の均衡点であるから

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j = 0 \qquad (1 \le i \le n).$$

よって

$$-a_{ii} \xi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \ne i)}}^{n} a_{ij} \xi_j \geqq a_{ij} \xi_j \qquad (i \ne j).$$

故に

$$(2) \quad \frac{|a_{ii}| \xi_i}{|a_{ij}| \xi_j} \geqq 1 \qquad \text{for } i \ne j.$$

さて $\max_{1 \le i \le n} \xi_i = \xi_j$ at some j, $1 \le j \le n$ とおくと，条件 $p \geqq \beta \xi$ は

$$p_i \geqq \alpha \frac{\xi_i}{\xi_j} \qquad (1 \le i \le n)$$ となる．

もし $i=j$ ならば

$$p_i \geqq \alpha \frac{\xi_i}{\xi_j} = \alpha \geqq |\lambda_i||a_{ii}|.$$

もし $i \neq j$ ならば，(2) より

$$p_i \geqq \alpha \frac{\xi_i}{\xi_j} \geqq \frac{\lambda_i |a_{ii}|^2}{|a_{ij}|} \cdot \frac{\xi_i}{\xi_j} \geqq \lambda_i |a_{ii}|.$$

lemma の証明は終る．

さて，定理の証明を行う．$n \times n$ 行列 $M(t) = (m_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ $(t=1,2,\cdots)$ を

$$m_{ii}(t) = 1 + \frac{\lambda_i a_{ii}}{p_i(t)} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

$$m_{ij}(t) = \frac{\lambda_i a_{ij}}{p_i(t)} \qquad (i \neq j)$$

で定義する．ただし，$p_i(t) > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ の場合に限ってである．すると system (1) は

$$(3) \qquad p(t+1) = M(t)\, p(t)$$

と表わされる．(1)の均衡点 ξ は

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j = 0 \qquad (1 \leq i \leq n) \quad \text{を満すから}$$

$$(4)\qquad \xi = M(t)\xi \qquad (t \geqq 0).$$

さて (I)を証明する．system (1)の初期値 p_0 は $p_0 \geqq \alpha e$ であるから，

$$p_0 \geqq \beta\xi .$$

上式が，

$$p(t) \geqq \beta\xi \qquad (t \geqq 0)$$

を意味することを示す．この為には，数学的帰納法に従い，$p(s) \geqq \beta\xi$ を仮定して

$$p(s+1) \geqq \beta\xi$$

を示せば良い．今，$p(s) \geqq \beta\xi$ を仮定すれば，lemma の結論として

$$p_i(s) \geqq \lambda_i |a_{ii}| \qquad (1 \leq i \leq n)$$

が得られる。上式は

$$M(s) \geqq 0$$

を意味することを示す．実際に，

$$m_{ii}(s) = 1 + \frac{\lambda_i a_{ii}}{p_i(s)} = 1 - \frac{\lambda_i |a_{ii}|}{p_i(s)} \geqq 0,$$

$$m_{ij}(s) = \frac{\lambda_i a_{ij}}{p_i(s)} \geqq 0 \quad (i \neq j).$$

さて，(3)，(4) より

$$p(s+1) - \beta\xi = M(s)\,(p(s) - \beta\xi).$$

今，$M(s) \geqq 0$ 且つ $p(s) - \beta\xi \geqq 0$ より，

$$M(s)\,(p(s) - \beta\xi) \geqq 0.$$

故に，

$$p(s+1) - \beta\xi \geqq 0.$$

$$p(s+1) \geqq \beta\xi.$$

以上より，

$$p(t) \geqq \beta\xi \quad (t \geqq 0)$$

が証明された．これは $p(t) \in R^+$ を意味している．
同時に

$$M(t) \geqq 0 \quad (t \geqq 0)$$

が証明された．

次に(II)を示す．$A>0$ を十分大なる数として

$$A\xi \geqq p_0$$

とする．

$$A\xi - p(t+1) = M(t)\,(A\xi - p(t)) \quad (t \geqq 0).$$

(I)の証明で，$M(t) \geqq 0 \quad (t \geqq 0)$ であることが判ったから，
$A\xi - p(t) \geqq 0$ は，

$$A\xi - p(t+1) \geqq 0$$

を意味する．仮定より $A\xi - p_0 \geqq 0$ であるから

$$A\xi - p(t) \geqq 0 \qquad (t \geqq 0),$$

即ち，

$$A\xi \geqq p(t) \qquad (t \geqq 0)$$

となる．これは $p(t)$ の有界性を示している．*)

最後に(III)を示す．以下，

$$\lambda E(p) = (\lambda_1 E_1(p), \lambda_2 E_2(p), \cdots, \lambda_n E_n(p))$$

と表す．

---

*) 上の(II)の証明は，東京大学 理学部 数学教室の矢野助手の advice に依る．

$x, y \in R^n$ に対し，その内積を

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\lambda_i},$$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$ と置く．

すると

$$\begin{aligned} |p(t+1)|^2 &= \langle p(t+1), p(t+1)\rangle \\ &= \langle p(t)+\lambda E(p(t)), p(t)+\lambda E(p(t))\rangle \\ &= \langle p(t), p(t)\rangle + 2\langle p(t), \lambda E(p(t))\rangle + \\ &\quad + \langle \lambda E(p(t)), \lambda E(p(t))\rangle. \end{aligned}$$

仮定より

$$\langle p(t), \lambda E(p(t))\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) E_i(p(t)) = 0 .$$

故に

$$(5) \quad |p(t+1)|^2 = |p(t)|^2 + |\lambda E(p(t))|^2 .$$

これより，$|p(t+1)| \geqq |p(t)|$ が得られ，数列 $\{|p(t)|\}_{t=1}^{\infty}$ は単調増加で，有界となり，

$$\lim_{t\to\infty} |p(t)| = A_0 \quad (>0)$$

が存在する．

(5) で，$t \to \infty$ とすると，

$$A_0^2 = A_0^2 + \lim_{t \to \infty} |\lambda E(p(t))|^2$$

故に

$$\lim_{t \to \infty} E(p(t)) = 0$$

となる，

均衡点の唯一性より，

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = A_0 \frac{\xi}{|\xi|}$$

となる．

証明は終る．

[注釈3]．定理の条件 $p_0 \geqq \alpha e$ が満されていない場合は，上の結論は必ずしも成立しない．例えば 2次元 system；

$$\begin{cases} p_1(t+1) - p_1(t) = \dfrac{-p_1(t) + p_2(t)}{p_1(t)} \\ p_2(t+1) - p_2(t) = \dfrac{p_1(t) - p_2(t)}{p_2(t)} \end{cases}$$

に於て，

初期値を $p_1(0) = \frac{1}{2}$，$p_2(0) = \frac{1}{8}$ とすれば，

$$p_1(1) = p_1(0) - 1 + \frac{p_2(0)}{p_1(0)} = -\frac{1}{4} < 0$$

となり，(I)は成立しないことが判る．

〔注釈4〕．需要－供給の法則が，微分方程式で記述されて来た，これまでの定理では，同様の結論を得るために，条件 $p_0 \geqq \alpha e$ に類するものは仮定されなかった．それは微分方程式を

$$p_i(t+dt) - p_i(t) = \lambda_i E_i(p(t))\, dt$$

と見れば，定理の条件は

$$p_0 \geqq \alpha\, dt\, e = 0$$

となり，常に満たされているからである．

最後に，本稿と同じ主題を扱った Uzawa 氏の論文［2］について述べる．彼の考える方程式は

$$p_i(t+1) = \max\,[\,0,\ p_i(t) + \lambda_i E_i(p(t))\,] \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

である．この方程式は，すべての財に於て，その価格が zero となる可能性を意味しており，従って関数 $E(p)$ は その連続関数としての定義域が，$p > 0$ のみならず，$p \geqq 0$（但し $p \neq 0$）となることが要請される．これに対し，本稿の system (1) は，すべての財の価格が，常に正であることが前提であり，関数 $E(p)$ は，$p_i = 0$ となる点 p では不連続である．

参考文献.

[1]. F. Nikaido, Convex structure and Economic Theory, Academic Press (1968).

[2]. H. Uzawa, Walras' Tâtonnement in the theory of exchange, Review of Economic Studies, vol. 27 (1959), pp. 182-194.